

Aula 4

Produto Externo (em \mathbb{R}^3)

Definição: Designa-se por **produto externo**, e representa-se pelo símbolo $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, a operação $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$\begin{aligned}(a_1, a_2, a_3) \times (b_1, b_2, b_3) &= (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) \\ &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{e}_3 \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}\end{aligned}$$

Propriedades: Para quaisquer $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$, tem-se

- i) $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$
- ii) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ (antisimetria)
- iii) $(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} \times \mathbf{c} + \beta\mathbf{b} \times \mathbf{c}$
 $\mathbf{a} \times (\beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}) = \beta\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \gamma\mathbf{a} \times \mathbf{c}$
 $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ (bilinearidade)

$$\text{iv) } (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

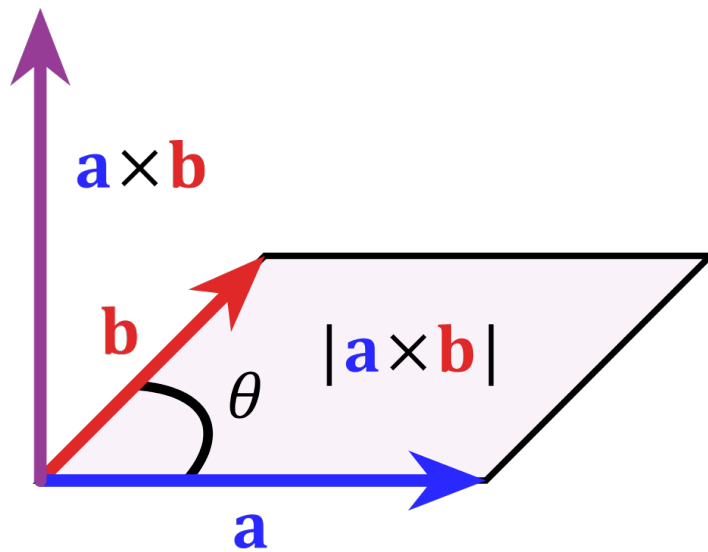
- v) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = 0, \quad (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} = 0$
($\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ é ortogonal a \mathbf{a} e \mathbf{b})

vi) $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$

vii) $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\sin \theta$,
em que $\theta \in [0, \pi]$ é o ângulo formado por \mathbf{a} e \mathbf{b} .

Área do paralelogramo formado por $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$

$$A = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin \theta = \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$$



Definição: Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície, ou seja, uma variedade de dimensão 2, parametrizada (globalmente) por $g : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, e seja $\phi : S \rightarrow \mathbb{R}$ um campo escalar contínuo sobre a superfície. Então, define-se o **integral de ϕ sobre a superfície S** , e designa-se por

$$\int_S \phi \quad \text{ou} \quad \int_S \phi dS,$$

o valor

$$\int_{\Omega} \phi(g(u, v)) \left\| \frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} \right\| du dv,$$

sempre que este integral (calculado sobre $(u, v) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$) exista.

Em particular, fazendo $\phi = 1$, obtém-se a área da superfície S

$$A(S) = \text{Vol}_2(S) = \int_S 1 dS = \int_{\Omega} \left\| \frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} \right\| du dv.$$